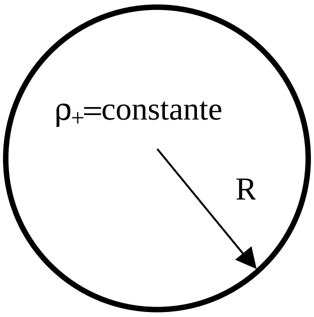
PROBLEMAS FÍSICA II

Ley de Gauss aplicada a la resolución de problemas de alta simetría



1) La esfera de radio R de la figura posee una distribución de carga uniforme en volumen ρ_+. Calcular el campo eléctrico $\overline{E}$ que genera en todo el espacio.
2) Para la misma configuración calcular el potencial eléctrico en todo el espacio.

Comenzaremos dando una serie de pasos comunes a todos los problemas que pueden resolverse aplicando la Ley de Gauss.

1_ Lo primero que haremos será describir cualitativamente la dirección y el sentido del campo y analizar de qué coordenadas depende.

Por ejemplo, en nuestro problema podemos decir que la dirección del campo generado es radial y su sentido es saliente de la esfera ya que $\rho>0$. A continuación observamos que dada la simetría del problema (esférica) el campo dependerá solo del radio al que nos encontremos. Veamos: si nos paramos a un dado radio y nos movemos por una superficie esférica (es decir variando φ o θ) veremos siempre el mismo sistema y no podremos distinguir entre dos posiciones diferentes. Ahora bien, si me alejo o me acerco de la esfera sí veré que mi sistema es diferente. Con esto podemos asegurar que el valor del campo para cualquier superficie en la que nos encontremos debe tener un valor constante.

2_ A continuación elegiremos una superficie Gaussiana conveniente.

La Ley de Gauss en el vacío nos dice que el flujo del campo eléctrico $\overline{E}$ a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la carga total encerrada por la superficie dividido ε_0. Esta ley se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\oint \overline{E} \cdot \overline{dS} = \frac{q_{enc}}{e_0} \qquad 1\_1$$

En nuestro problema, con las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta la ley de Gauss, vemos que podremos hacer uso de ella para calcular fácilmente el campo eléctrico en todo el espacio. Ya dijimos que si nos movemos por una superficie esférica, el valor del campo tiene que ser el mismo, también sabemos que el campo será paralelo a la normal a esta superficie con lo que el producto escalar de la integral se transforma en el producto de los módulos:

$$\oint EdS = \frac{q_{enc}}{e_0} \qquad 1\_2$$

y como el campo es una constante para la superficie elegida, lo podemos sacar de la integral, llegando a:

$$E\oint dS = \frac{q_{enc}}{e_0} \qquad 1\_3$$

en donde la $\oint dS$ será la superficie de una esfera en nuestro caso.

3_ Determinaremos en cuántas zonas se debe dividir el problema de acuerdo a la distribución de carga que tengamos.

4_ Calcularemos la carga **encerrada** por la superficie elegida en **2** para cada una de las regiones que determinamos en **3** . **Importante:** Solo se calcula lo que se encuentra **dentro** de la superficie gaussiana.

Para distribución volumétrica:

$$q_{enc} = \int r dVol \qquad 1\_4$$

Para distribución superficial:

$$q_{enc} = \int s dSup \qquad 1\_5$$

Para distribución lineal:

$$q_{enc} = \int l dl \qquad 1\_6$$

Hasta acá es el razonamiento que debemos llevar a cabo para todos los problemas a resolver por Gauss. A continuación veremos la resolución particular de nuestro ejercicio.

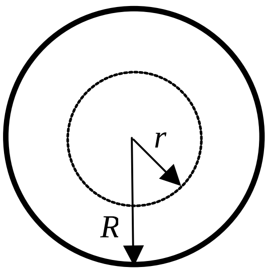
5_ Por último calculamos el campo haciendo uso de la ecuación 1_3.

1) Cálculo del campo eléctrico en todo el espacio

Tenemos dos regiones: una zona del espacio donde hay una distribución de carga con geometría esférica y el vacío. Por lo tanto, en principio, se resolverá dividiéndolo en dos partes:

a) Para $r\langle R$
b) Para $r\rangle R$

a) Para $r\langle R$



Como ya analizamos anteriormente la superficie que nos conviene elegir es la de una esfera. Para esta parte del problema tomaremos una esfera de radio genérico *r* menor a R. De acuerdo con la ecuación 1_3:

$$E\oint dS = \frac{q_{enc}}{e_0}$$

y a su vez la carga encerrada será:

$$q_{enc} = \int r dVol$$

como ρ es constante lo podemos sacar de la integral y llegamos a:

$$E 4pr^2 = \frac{r\, 4pr^3}{3e_0}$$

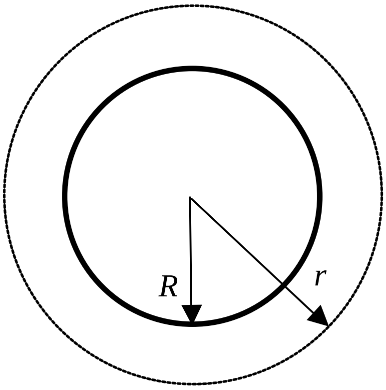
Llegamos entonces a:

$$E = \frac{r r}{3e_0}$$

Esto que hemos obtenido es el módulo del campo eléctrico. Como dedujimos al principio, la dirección es radial. Por lo tanto, la expresión completa del campo para esta región del espacio será:

$$\boxed{\overline{E} = \frac{r r}{3e_0} \mathbf{r}}$$

b) Para $r \rangle R$



Para esta región tomaremos nuevamente una superficie esférica.

$$E \oint dS = \frac{q_{enc}}{e_0} = \frac{\int r dVol}{e_0}$$

$$E 4pr^2 = \frac{r\, 4pR^3}{3e_0}$$

$$E = \frac{rR^3}{3e_0 r^2}$$

$$\boxed{\overline{E} = \frac{rR^3}{3e_0 r^2} \mathbf{r}}$$

- En este caso la carga total encerrada corresponde a toda la carga que tiene la esfera.

- Si nos alejamos de la esfera podemos considerarla como una carga puntual y comprobamos que la expresión coincide con la expresión del campo eléctrico de una carga puntual de una carga puntual.

2) Cálculo del potencial en todo el espacio

Una vez obtenido el campo podemos determinar el potencial a partir de él. Consideraremos V=0 en el infinito (V_∞=0) ya que tenemos una distribución **finita** de cargas.

$$\int_{V_\infty}^{V(r)} dV = -\int_{\infty}^{r} \overline{E} \cdot d\overline{r}$$

a) Para $r \rangle R$

$$\int_{V_\infty}^{V(r)} dV = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q_{tot}\,dr}{4pe_0 r^2}$$

$$V(r) - V_\infty = \frac{Q_{tot}}{4pr}$$

b) Para $r \langle R$

$$\int_{V_\infty}^{V(r)} dV = -\int_{\infty}^{r} \overline{E} \cdot d\overline{r} = -\int_{\infty}^{R} \overline{E_a} \cdot d\overline{r} - \int_{R}^{r} \overline{E_b} \cdot d\overline{r}$$

$$V(r) - V_\infty = \frac{Q_{tot}}{4pR} - \int_{R}^{r} \frac{r r dr}{3e_0}$$

$$V(r) - V_\infty = \frac{Q_{tot}}{4pR} - \left. \frac{r r^2}{3 \cdot 2e_0} \right|_R^r = \frac{Q_{tot}}{4pR} - \frac{r\left(r^2 - R^2\right)}{3 \cdot 2e_0}$$

Graficamos los resultados obtenidos: